RNDr. Ján ŠIMON, PhD.
e-mail: jan.simon@fstroj.uniza.sk
konzultácie: AD-107, KAM, SjF, ŽU

Domáca úloha č.15

Nekonečné číselné rady

Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich nekonečných číselných radov pomocou porovnávacieho kritéria[1]

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^{n-1}}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1000n+1}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2+1}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+2n^3}{n+5n^5}$

Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich nekonečných číselných radov pomocou d'Alembertovho[2], alebo Cauchyho kritéria[3]

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}$

---

[1] Ak $a_n \le b_n$ pre $\forall n \in \mathbb{N}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, potom konverguje aj $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ak $a_n \le b_n$ pre $\forall n \in \mathbb{N}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, potom diverguje aj $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
Ďalej nech a_n aj b_n sú nezáporné čísla pre $\forall n \in \mathbb{N}$ a existuje limita $K \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$. Potom:
- ak $K \in (0,\infty)$, potom rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ majú rovnaký charakter,
- ak $K = 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, potom konverguje aj $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,
- ak $K = \infty$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje, potom diverguje aj $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

[2] d'Alembertovo kritérium: Nech a_n sú nezáporné čísla. Definujeme $K \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Ak $K < 1$ ($K > 1$) tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (diverguje).

[3] Cauchyho kritérium: Nech a_n sú nezáporné čísla. Definujeme $K \equiv \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Ak $K < 1$ ($K > 1$) tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (diverguje).

RNDr. Ján ŠIMON, PhD.
e-mail: jan.simon@fstroj.uniza.sk
konzultácie: AD-107, KAM, SjF, ŽU

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n^2(n-1)}$

Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich nekonečných číselných radov pomocou integrálneho kritéria[4].

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p},\quad p>0$

13. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n},\quad p>0$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{n+2}}{n\ln^2(n+1)}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}$

Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich nekonečných číselných radov so striedavými znamienkami[5].

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{1}{n}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-n^2}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n^2-n+3}$

[4]Integrálne ktitérium: Nech $f(x)$ je nezáporná, nerastúca, spojitá funkcia a nech $a_n=f(n)$. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konverguje ak $\int_1^{\infty}f\mathrm{d}x$ je konečné číslo, inak diverguje.

[5]Pre rady so striedavými znamienkami platia nasledujúce vety:
-Ak konverguje $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, potom konverguje aj $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.
-Ak a_n je rýdzo monotónna postupnosť a platí $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, potom $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konverguje.